Frazioni Continue, Continue Riforme

Alessandro Logar

30 marzo 2011

Esempio

$$\frac{501}{217} = 2.\overline{308755760368663594470046082949}$$

Esempio

$$\begin{aligned}\frac{501}{217} &= 2.\overline{3087557603686635944700460829 49} \\ &\cong 2\end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned}
\frac{501}{217} &= 2.\overline{308755760368663594470046082949} \\
&\cong 2 \\
&\cong 2 + \frac{1}{3} \,(= \; 2.3333333333\ldots)
\end{aligned}$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\frac{501}{217} &= 2.\overline{308755760368663594470046082949} \\
&\cong 2 \\
&\cong 2+\frac{1}{3} \ (= \ 2.3333333333\ldots) \\
&\cong 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}} \ (= \ 2.307692308\ldots)
\end{aligned}
$$

Esempio

$$\begin{aligned}
\frac{501}{217} &= 2.\overline{308755760368663594470046082949} \\
&\cong 2 \\
&\cong 2+\frac{1}{3} \ (= \ 2.3333333333\ldots) \\
&\cong 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}} \ (= \ 2.307692308\ldots) \\
&\cong 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}} \ (= \ 2.308823529\ldots)
\end{aligned}$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
\frac{501}{217} &= 2.\overline{308755760368663594470046082949} \\
&\cong 2 \\
&\cong 2+\frac{1}{3} \; (= \; 2.3333333333\ldots) \\
&\cong 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}} \; (= \; 2.307692308\ldots) \\
&\cong 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}} \; (= \; 2.308823529\ldots) \\
&= 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+1/3}}} \; (= \; 2.308755760\ldots)
\end{aligned}
$$

Esempio

Quindi

$$\frac{501}{217} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}}$$

Definizione

In generale, un'espressione del tipo:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \cfrac{1}{a_{r-1} + \cfrac{1}{a_r}}}}}$$

dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{N}$

si dice *frazione continua finita.*

Si indica anche con:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_r]$$

In generale, un'espressione del tipo:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \cfrac{1}{a_{r-1} + \cfrac{1}{a_r}}}}}$$

dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$

si dice *frazione continua finita.*
Si indica anche con:

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_r]$$

Una frazione continua finita è necessariamente un numero razionale.

Le frazioni continue però possono essere anche infinite ....

$$x^2 - 6x - 1 = 0 \qquad x_1 = 3 - \sqrt{10}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

$$x = 6 + \frac{1}{x}$$

Frazioni continue infinite

Una frazione continua finita è necessariamente un numero razionale.
Le frazioni continue però possono essere anche infinite ....

$$x^2 - 6x - 1 = 0 \qquad x_1 = 3 - \sqrt{10}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

$$x = 6 + \frac{1}{x}$$

Frazioni continue infinite

Una frazione continua finita è necessariamente un numero razionale.
Le frazioni continue però possono essere anche infinite ....

$$x^2 - 6x - 1 = 0 \qquad x_1 = 3 - \sqrt{10}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

$$x = 6 + \frac{1}{x}$$

Frazioni continue infinite

Una frazione continua finita è necessariamente un numero razionale.
Le frazioni continue però possono essere anche infinite ....

$$x^2 - 6x - 1 = 0 \qquad x_1 = 3 - \sqrt{10}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

$$x = 6 + \frac{1}{x}$$

Frazioni continue infinite

Una frazione continua finita è necessariamente un numero razionale.
Le frazioni continue però possono essere anche infinite ....

$$x^2 - 6x - 1 = 0 \qquad x_1 = 3 - \sqrt{10}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} x &= 6 + \frac{1}{x} \\ &= 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{x}} \end{aligned}$$

Frazioni continue infinite

Una frazione continua finita è necessariamente un numero razionale.
Le frazioni continue però possono essere anche infinite ....

$$x^2 - 6x - 1 = 0 \qquad x_1 = 3 - \sqrt{10}, \quad x_2 = 3 + \sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} x &= 6 + \frac{1}{x} \\ &= 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{x}} \\ &= 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{x}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Frazioni continue infinite

Pertanto:

$$x = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}$$

Cioè

$$x = [6; 6, 6, 6, 6, \dots]$$

è una frazione continua infinita (ammesso ciò voglia dire qualcosa).

Frazioni continue infinite

Definizione

Un'espressione del tipo:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$$

cioè:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

dove $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$ si dice frazione continua infinita (ordinaria).

I convergenti

Definizione

Data una frazione continua (finita o infinita), le frazioni continue finite

$$[a_0] \quad [a_0; a_1] \quad [a_0; a_1, a_2] \quad \ldots$$

si dicono i convergenti della frazione continua.

I convergenti sono dei numeri razionali $\frac{p_k}{q_k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= a_0 \\
\frac{p_1}{q_1} &= [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} \\
\frac{p_2}{q_2} &= [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Definizione

Data una frazione continua (finita o infinita), le frazioni continue finite

$$[a_0] \quad [a_0; a_1] \quad [a_0; a_1, a_2] \quad \dots$$

si dicono i convergenti della frazione continua.

I convergenti sono dei numeri razionali $\frac{p_k}{q_k}$:

$$\begin{aligned}
\frac{p_0}{q_0} &= a_0 \\
\frac{p_1}{q_1} &= [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} \\
\frac{p_2}{q_2} &= [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \\
\dots &= \dots
\end{aligned}$$

I convergenti

In generale,

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \quad \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

cioè:

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

I convergenti

Teorema

La successione dei convergenti

$$\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_k$$

di una frazione continua: $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *converge ad un numero reale* α.

Il numero α si chiama il valore della frazione continua $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$

Frazioni continue e numeri reali

Ogni numero reale si può rappresentare con una frazione continua.

$$\mathbb{R} \longleftrightarrow \{[a_0; a_1, a_2, \ldots] \mid \text{fraz. cont.}\}$$

Esempi

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}$$

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$$

Esempi

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}}$$

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \dots]$$

Esempi

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}$$

$$\begin{aligned}\pi \quad = \quad & [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, \\ & 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, \\ & 4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 6, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, \\ & 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, \ldots]\end{aligned}$$

Esempi

$$e - 1 = [1; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots]$$

$$\tan(1) = [1; 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, 1, 9, 1, 11, 1, 13, 1, 15, \dots]$$

$$\tan(1/2) = [0, 1, 1, 4, 1, 8, 1, 12, 1, 16, 1, 20, 1, 24, 1, 28, \dots]$$

$$\tan(1/3) = [0, 2, 1, 7, 1, 13, 1, 19, 1, 25, 1, 31, 1, 37, 1, 43 \dots]$$

Frazioni continue e numeri reali

Le frazioni continue evidenziano proprietà “intrinseche” dei numeri.

Un numero reale è razionale se e solo se la frazione continua che lo rappresenta è finita.

Un numero si rappresenta in una fissata base. Le proprietà della rappresentazione non sono proprietà del numero.

La rappresentazione in base 10 di un numero può ad esempio essere decimale finita, ma la sua rappresentazione in base 2 invece periodica (e viceversa).

Frazioni continue e numeri reali

Le frazioni continue evidenziano proprietà “intrinseche” dei numeri.

Un numero reale è razionale se e solo se la frazione continua che lo rappresenta è finita.

Un numero si rappresenta in una fissata base. Le proprietà della rappresentazione non sono proprietà del numero.

La rappresentazione in base 10 di un numero può ad esempio essere decimale finita, ma la sua rappresentazione in base 2 invece periodica (e viceversa).

Numeri reali

Esempio (Java)

```
...
double a = 4.35;
int b;
b = (int)(100*a);
System.out.println(b);
```

Il numero 4.35 quando viene rappresentato in base 2 risulta periodico:

$$4.35_{10} = 100.01\ 0110\ 0110\ 0110\ 0110\ \cdots\ _2$$

pertanto nella rappresentazione nella memoria del computer viene troncato ...

Numeri reali

Esempio (Java)

```
...
double a = 4.35;
int b;
b = (int)(100*a);
System.out.println(b);
```

Il numero 4.35 quando viene rappresentato in base 2 risulta periodico:

$$4.35_{10} = 100.01\ 0110\ 0110\ 0110\ 0110\ \cdots\ _2$$

pertanto nella rappresentazione nella memoria del computer viene troncato ...

La costante di Khinchin

Sia $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ una frazione continua che rappresenta un numero reale α. Consideriamo:

$$u_0 = a_0,\ u_1 = \sqrt{a_0 \cdot a_1},\ u_2 = \sqrt[3]{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2},\ u_3 = \sqrt[4]{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}, \dots$$

cioè:

$$u_k = \sqrt[k]{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}}$$

è la media geometrica dei primi k interi $a_0, a_1, \dots, a_k$ per ogni k. Aleksandr Yakovlevich Khinchin (19 luglio 1894 - 18 novembre 1959) ha dimostrato che:

Teorema

per "quasi ogni numero" reale α, il limite della successione $(u_k)_k$ esiste ed ha sempre lo stesso valore: $2.6854520010\dots$

Sia $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ una frazione continua che rappresenta un numero reale α. Consideriamo:

$$u_0 = a_0,\ u_1 = \sqrt{a_0 \cdot a_1},\ u_2 = \sqrt[3]{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2},\ u_3 = \sqrt[4]{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}, \dots$$

cioè:

$$u_k = \sqrt[k]{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}}$$

è la media geometrica dei primi k interi $a_0, a_1, \dots, a_k$ per ogni k.
Aleksandr Yakovlevich Khinchin (19 luglio 1894 - 18 novembre 1959) ha dimostrato che:

Teorema

per "quasi ogni numero" reale α, il limite della successione $(u_k)_k$ esiste ed ha sempre lo stesso valore: $2.6854520010\dots$

La costante di Khinchin

Sia $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ una frazione continua che rappresenta un numero reale α. Consideriamo:

$$u_0 = a_0,\ u_1 = \sqrt{a_0 \cdot a_1},\ u_2 = \sqrt[3]{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2},\ u_3 = \sqrt[4]{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}, \dots$$

cioè:

$$u_k = \sqrt[k]{a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_{k-1}}$$

è la media geometrica dei primi k interi $a_0, a_1, \dots, a_k$ per ogni k. Aleksandr Yakovlevich Khinchin (19 luglio 1894 - 18 novembre 1959) ha dimostrato che:

Teorema

per "quasi ogni numero" reale α, il limite della successione $(u_k)_k$ esiste ed ha sempre lo stesso valore: 2.6854520010...

La costante di Khinchin

$K_0 = 2.6854520010\ldots$ si dice costante di Khinchin.

È facile trovare numeri per cui la media geometrica dei quozienti parziali non converge alla costante di Khinchin. Ad esempio tutti i numeri razionali o il numero di Nepero e.

Si sospetta (facile...) che a π e a K_0 corrisponda la costante di Khinchin, ma non si conoscono dimostrazioni.

Di più: non si conosce alcun numero reale "esplicito" a cui corrisponda la costante di Khinchin.

La costante di Khinchin

$K_0 = 2.6854520010\ldots$ si dice costante di Khinchin.

È facile trovare numeri per cui la media geometrica dei quozienti parziali non converge alla costante di Khinchin. Ad esempio tutti i numeri razionali o il numero di Nepero e.

Si sospetta (facile...) che a π e a K_0 corrisponda la costante di Khinchin, ma non si conoscono dimostrazioni.

Di più: non si conosce alcun numero reale "esplicito" a cui corrisponda la costante di Khinchin.

La costante di Khinchin

$K_0 = 2.6854520010\ldots$ si dice costante di Khinchin.

È facile trovare numeri per cui la media geometrica dei quozienti parziali non converge alla costante di Khinchin. Ad esempio tutti i numeri razionali o il numero di Nepero e.

Si sospetta (facile...) che a π e a K_0 corrisponda la costante di Khinchin, ma non si conoscono dimostrazioni.

Di più: non si conosce alcun numero reale "esplicito" a cui corrisponda la costante di Khinchin.

La costante di Khinchin

$K_0 = 2.6854520010\ldots$ si dice costante di Khinchin.

È facile trovare numeri per cui la media geometrica dei quozienti parziali non converge alla costante di Khinchin. Ad esempio tutti i numeri razionali o il numero di Nepero e.

Si sospetta (facile. . .) che a π e a K_0 corrisponda la costante di Khinchin, ma non si conoscono dimostrazioni.

Di più: non si conosce alcun numero reale “esplicito” a cui corrisponda la costante di Khinchin.

La costante di Khinchin

Non si sa se la costante di Khinchin sia irrazionale.

Sul sito:

`http://pi.lacim.uqam.ca/piDATA/khintchine.txt`

si trova la costante di Khinchin calcolata con 110000 decimali (il 09/02/97 da Xavier Gourdon)

La costante di Khinchin

Non si sa se la costante di Khinchin sia irrazionale.

Sul sito:

`http://pi.lacim.uqam.ca/piDATA/khintchine.txt`

si trova la costante di Khinchin calcolata con 110000 decimali (il 09/02/97 da Xavier Gourdon)

Migliori approssimanti

Definizione

Sia α un numero reale. Un numero razionale $\frac{a}{b}$ si dice miglior approssimante di α (del I tipo) se per ogni frazione $\frac{c}{d}$ tale che $0 < d \leq b$ vale:

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{c}{d}\right|$$

Migliori approssimanti

Ogni convergente di un numero α è un miglior approssimante e viceversa, ogni miglior approssimante è un convergente (o quasi).

Esempio:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \dots]$$

I primi convergenti sono:

$$\begin{array}{lclcl}
[3] & = & 3/1 & = & 3.0 \\
[3; 7] & = & 22/7 & = & 3.14285714285714 \\
[3; 7, 15] & = & 333/106 & = & 3.14150943396226 \\
[3; 7, 15, 1] & = & 355/113 & = & 3.14159292035398
\end{array}$$

(Archimede 287-212 BC, Zu Chongzhi 480 DC)

Migliori approssimanti

Ogni convergente di un numero α è un miglior approssimante e viceversa, ogni miglior approssimante è un convergente (o quasi).

Esempio:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, \ldots]$$

I primi convergenti sono:

$$\begin{array}{lclcl}
[3] & = & 3/1 & = & 3.0 \\
[3; 7] & = & 22/7 & = & 3.14285714285714 \\
[3; 7, 15] & = & 333/106 & = & 3.14150943396226 \\
[3; 7, 15, 1] & = & 355/113 & = & 3.14159292035398
\end{array}$$

(Archimede 287-212 BC, Zu Chongzhi 480 DC)

Migliori approssimanti

Ci sono numeri che si fanno approssimare meglio dai loro convergenti e numeri che si fanno approssimare peggio.

Il numero aureo

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}} \\
&= [1; 1, 1, 1, 1, \dots] \\
&= 1.61803398874989
\end{aligned}
$$

è quello che tra tutti i numeri reali viene peggiormente approssimato dai suoi convergenti.

Migliori approssimanti

Ci sono numeri che si fanno approssimare meglio dai loro convergenti e numeri che si fanno approssimare peggio.

Il numero aureo

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}\\ &= [1;1,1,1,1,\ldots]\\ &= 1.61803398874989\end{aligned}$$

è quello che tra tutti i numeri reali viene peggiormente approssimato dai suoi convergenti.

Migliori approssimanti

$$
\begin{aligned}
[1] &= 1 &= 1.0\\
[1;1] &= 2 &= 2.0\\
[1;1,1] &= 3/2 &= 1.5\\
[1;1,1,1] &= 5/3 &= 1.3333333333\\
[1;1,1,1,1] &= 8/5 &= 1.6000000000\\
[1;1,1,1,1,1] &= 13/8 &= 1.6250000000
\end{aligned}
$$

Numeri algebrici

La "velocità" con cui viene approssimato un numero reale con i suoi convergenti rivela importanti proprietà del numero.

Definizione

Un numero reale α si dice algebrico (di grado n) se è la radice di un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado n (e n è minimo possibile).

φ è algebrico di grado 2, in quanto radice del polinomio $x^2 - x - 1$.

Numeri algebrici

La "velocità" con cui viene approssimato un numero reale con i suoi convergenti rivela importanti proprietà del numero.

Definizione

Un numero reale α si dice algebrico (di grado n) se è la radice di un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado n (e n è minimo possibile).

φ è algebrico di grado 2, in quanto radice del polinomio $x^2 - x - 1$.

Numeri algebrici

La “velocità” con cui viene approssimato un numero reale con i suoi convergenti rivela importanti proprietà del numero.

Definizione

Un numero reale α si dice algebrico (di grado n) se è la radice di un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado n (e n è minimo possibile).

φ è algebrico di grado 2, in quanto radice del polinomio $x^2 - x - 1$.

Numeri algebrici

numero alg.: $\sqrt[3]{5}+\sqrt{3}$

pol. min.: $x^6-9x^4-10x^3+27x^2-90x-2$

numero alg.: $\sqrt{3+\sqrt[4]{2}}$

pol. min.: $x^8-12x^6+54x^4-108x^2+79$

numero alg.: $\sqrt{\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{5}}$

pol. min.: $x^{24}-12x^{18}-15x^{16}+54x^{12}-720x^{10}$
$+75x^8-108x^6-1350x^4-900x^2-44$

Numeri algebrici

numero alg.: $2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[4]{5}$

pol. min.:

$$\begin{aligned}
&x^{24} - 96x^{22} - 648x^{21} - 3456x^{20}\\
&+ 31104x^{19} + 193948x^{18} - 7838208x^{17}\\
&+ 34052832x^{16} - 1470995640x^{15}\\
&+ 2867002368x^{14} + 74354407488x^{13}\\
&- 162708833338x^{12} - 2593176436224x^{11}\\
&+ 16495900787040x^{10} - 60142304360376x^{9}\\
&- 494817323736960x^{8} + 610361952078412 8x^{7}\\
&+ 29144224822577308x^{6} + 188111189747865 60x^{5}\\
&+ 60902783125823491 2x^{4} + 1435381316140844664x^{3}\\
&- 2850788259340456704x^{2} + 1365639289595239507 2x\\
&- 1571416092625378751 9
\end{aligned}$$

Numeri algebrici

Se un numero non è algebrico, si dice trascendente.

Teorema

(Liouville) Se α è un numero algebrico di grado n allora esiste una costante C tale che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n} \quad \forall\, p, q$$

Numeri algebrici

Se un numero non è algebrico, si dice trascendente.

Teorema

(Liouville) Se α è un numero algebrico di grado n allora esiste una costante C tale che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^n} \quad \forall\, p, q$$

Conseguenza: Se riusciamo a trovare un numero reale β tale che per ogni n esistono p e q ($q > 1$) con la proprietà:

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

il numero β non può essere algebrico.

Con le frazioni continue è facile costruire numeri con questa proprietà.
Fissiamo a_0 e costruiamo i successivi a_k con la formula:

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}$$

È facile vedere che un numero $\beta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ così costruito soddisfa alla condizione di sopra, quindi non è un numero algebrico, ma trascendente.

Numeri algebrici

Conseguenza: Se riusciamo a trovare un numero reale β tale che per ogni n esistono p e q ($q > 1$) con la proprietà:

$$\left|\beta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

il numero β non può essere algebrico.

Con le frazioni continue è facile costruire numeri con questa proprietà.
Fissiamo a_0 e costruiamo i successivi a_k con la formula:

$$a_{k+1} > q_k^{k-1}$$

È facile vedere che un numero $\beta = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ così costruito soddisfa alla condizione di sopra, quindi non è un numero algebrico, ma trascendente.

Numeri alg. grado 2

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2} &= [1; 2, 2, 2, 2, \ldots] \\
\sqrt{3} &= [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots] \\
\sqrt{19} &= [4; 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8, \ldots] \\
\sqrt{23} &= [4; 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, 1, 3, 1, 8, \ldots] \\
\frac{2+2\sqrt{5}}{5} &= [1; 3, 2, 1, 1, 10, 1, 1, 2, 3, 1, 2, 44, 2, 1, \\
&\quad 3, 2, 1, 1, 10, 1, 1, 2, 3, 1, 2, 44, 2, 1 \ldots]
\end{aligned}
$$

Numeri alg. grado 2

Teorema

(Lagrange, 1770) Un numero algebrico di grado 2 si esprime con una frazione continua periodica.
Viceversa, una frazione continua periodica rappresenta un numero algebrico di grado 2.

Oltre il grado 2

$$\sqrt[3]{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12,$$

Oltre il grado 2

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, \\ &\quad 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4,\end{aligned}$$

Oltre il grado 2

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} &= [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12,\\ &\quad 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4,\\ &\quad 534,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{2} \quad = \quad & [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, \\
& 2, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 1, 2, 14, 3, 12, 1, 15, 3, 1, 4, \\
& 534, 1, 1, 5, 1, 1, 121, 1, 2, 2 \\
& 4, 10, 3, 2, 2, 41, 1, 1, 1, 3, 7, 2, \\
& 2, 9, 4, 1, 3, 7, 6, 1, 1, 2, 2, 9, 3, \\
& 1, 1, 69, 4, 4, 5, 12, 1, 1, 5, 15, 1, \\
& 4, 1, 1, 1, 1, 1, 89, 1, 22, 186, 6, 2, 3, 1, \\
& 3, 2, 1, 1, 5, 1, 3, 1, 8, 9, 1, 26, 1, \\
& 7, 1, 18, 6, 1, 372, 3, 13, 1, 1, 14, 2, \\
& 2, 2, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 9, 1, 6, 1, \ldots]
\end{aligned}
$$

Oltre il grado 2

"No properties of the representing continued fractions, analogous to those which have just been proved, are known for algebraic numbers of higher degree. [...] It is of interest to point out that up till the present time no continued fraction development of an algebraic number of higher degree than the second is known. It is not even known if such a development has bounded elements. Generally speaking the problems associated with the continued fraction expansion of algebraic numbers of degree higher than the second are extremely difficult and virtually unstudied."

(Khinchin, 1963).

Riconoscimento numeri razionali

$$\frac{9495}{3847} = 2.4681570054587990642058747075643358461 1385\ldots$$

frazione continua:

$$[2; 2, 7, 2, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1364529199901480991767113072394414 3, 1, 2, 1, 12, 1, 6\ldots]$$

Riconoscimento numeri razionali

$$\frac{9495}{3847} = 2.4681570054587990642058747075643358461138 5\dots$$

frazione continua:

$$[2; 2, 7, 2, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1,$$
$$1364529199901480991767113072394414 3,$$
$$1, 2, 1, 12, 1, 6 \dots]$$

Riconoscimento numeri razionali

Considero la frazione continua finita:

$$[2; 2, 7, 2, 1, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Il suo valore è:

$$\frac{9495}{3847}$$

Riconoscimento numeri razionali

Esempio:
Trovare le radici razionali di

$$3847x^2 - 14808904x + 36527265 = 0$$

Con Newton (partendo dal punto iniziale 0), si trova subito una radice approssimata:

$$x_1 = 2.4681570048074019230431668 46$$

numero razionale corrispondente:

$$\frac{9495}{3847}$$

Si verifica che è radice del polinomio.

Riconoscimento numeri razionali

Esempio:
Trovare le radici razionali di

$$3847x^2 - 14808904x + 36527265 = 0$$

Con Newton (partendo dal punto iniziale 0), si trova subito una radice approssimata:

$$x_1 = 2.468157004807401923043166846$$

numero razionale corrispondente:

$$\frac{9495}{3847}$$

Si verifica che è radice del polinomio.

Riconoscimento numeri razionali

Esempio:
Trovare le radici razionali di

$$3847x^2 - 14808904x + 36527265 = 0$$

Con Newton (partendo dal punto iniziale 0), si trova subito una radice approssimata:

$$x_1 = 2.468157004807401923043166846$$

numero razionale corrispondente:

$$\frac{9495}{3847}$$

Si verifica che è radice del polinomio.

Nel 1655 compare nel libro di Wallis *Aritmetica Infinitorum* la formula

$$\frac{4}{\pi} = \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

attribuita a William Brouncker (1620-1684) dimostrata da Eulero qualche decennio più tardi.

frazioni continue generalizzate

$$\pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \cfrac{9^2}{6 + \cfrac{11^2}{6 + \ddots}}}}}}$$

frazioni continue generalizzate

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{13 + \ddots}}}}}}$$

(L. J. Lange, 1999)

Riforme

1999 Riforma Berlinguer (3+2) triennale + specialistica totale 300 crediti

2000 Zecchino

2004 Riforma Moratti: 180 crediti + 120 crediti, laurea magistrale
+"riforma epocale".

2007 Decreto Mussi: max 20 esami nella triennale max 12 esami magistrale

2010 Riforma Gelmini "II riforma epocale".

Riforme

1999 Riforma Berlinguer (3+2) triennale + specialistica totale 300 crediti

2000 Zecchino

2004 Riforma Moratti: 180 crediti + 120 crediti, laurea magistrale
+"riforma epocale".

2007 Decreto Mussi: max 20 esami nella triennale max 12 esami magistrale

2010 Riforma Gelmini "II riforma epocale".

Riforme

1999 Riforma Berlinguer (3+2) triennale + specialistica totale 300 crediti

2000 Zecchino

2004 Riforma Moratti: 180 crediti + 120 crediti, laurea magistrale
+“riforma epocale”.

2007 Decreto Mussi: max 20 esami nella triennale max 12 esami magistrale

2010 Riforma Gelmini “II riforma epocale”.

Riforme

1999 Riforma Berlinguer (3+2) triennale + specialistica totale 300 crediti

2000 Zecchino

2004 Riforma Moratti: 180 crediti + 120 crediti, laurea magistrale
+“riforma epocale”.

2007 Decreto Mussi: max 20 esami nella triennale max 12 esami magistrale

2010 Riforma Gelmini “II riforma epocale”.

Riforme

1999 Riforma Berlinguer (3+2) triennale + specialistica totale 300 crediti

2000 Zecchino

2004 Riforma Moratti: 180 crediti + 120 crediti, laurea magistrale
+“riforma epocale”.

2007 Decreto Mussi: max 20 esami nella triennale max 12 esami magistrale

2010 Riforma Gelmini “II riforma epocale”.

Prima della riforma Berlinguer:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

Riforme

dopo riforma Berlinguer:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

Riforme

prima degli interventi di Zecchino:

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ddots}}}}}}}}$$

dopo Zecchino

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\ddots}}}}}}}}$$

Riforme

Valore della Costante di Khinchin prima della riforma Moratti:

$$2.6854520010\ldots$$

Valore della Costante di Khinchin dopo la riforma Moratti:

$$2.6854520010\ldots$$

Riforme

Valore della Costante di Khinchin prima della riforma Moratti:

$$2.6854520010\ldots$$

Valore della Costante di Khinchin dopo la riforma Moratti:

$$2.6854520010\ldots$$

Riforme

Prima del Decreto Mussi:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Riforme

Dopo Decreto Mussi:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

Riforme

Prima della riforma Gelmini:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{13 + \ddots}}}}}}$$

Dopo la riforma Gelmini:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{13 + \ddots}}}}}}$$

però…

Dopo la riforma Gelmini

ci sarà ancora un'Università
dove si studiano
questi argomenti?